

Mathematik in Merksätzen, Beispielen und Übungen

Teil 1:

Zahlen verstehen und mit Zahlen rechnen

Grundlagen der Algebra

Siehe auch:

Teil 2: Räume und Formen begreifen – Grundlagen der Geometrie

Teil 3: Daten erheben und auswerten – Grundlagen der Stochastik

Teil 4: Zuordnen und Zusammenhänge beschreiben – Grundlagen der Analysis

Inhalt

Inhalt.....	2
Kapitel 1: Rechnen mit Natürlichen Zahlen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
1.1 Schriftliche Rechenverfahren	Fehler! Textmarke nicht definiert.
1.2 Teilbarkeit.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
1.3 Potenzen und Wurzeln	Fehler! Textmarke nicht definiert.
Kapitel 2: Größen und Einheiten	Fehler! Textmarke nicht definiert.
2.1 Viele Einheiten für wenige Größen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
2.2 Vorsätze für Einheiten	Fehler! Textmarke nicht definiert.
2.3 Umrechnung von Längen- und Masseeinheiten	Fehler! Textmarke nicht definiert.
2.4 Umrechnung von Flächen- und Volumeneinheiten	Fehler! Textmarke nicht definiert.
2.5 Umrechnung von Zeiteinheiten.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
2.6 Zusammengesetzte Einheiten	Fehler! Textmarke nicht definiert.
Kapitel 3: Terme und Gleichungen mit Natürlichen Zahlen	3
3.1 Terme	3
3.2 Vorrangrechenregeln	4
3.3 Rechengesetze.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.4 Variablen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.5 Gleichungen.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.6 9.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
Kapitel 4: Rechnen mit Bruchzahlen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
4.1 Rechnen mit gewöhnlichen (gemeinen) Brüchen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.2 Rechnen mit Dezimalzahlen	Fehler! Textmarke nicht definiert.
Terme mit Variable.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
Vorlagen	9

Kapitel 3: Terme und Gleichungen mit Natürlichen Zahlen

3.1 Terme

Rechenoperatoren

Ein (Rechen-)Operator ist ein mathematisches Symbol, das angibt, welche Rechnung ausgeführt werden soll. Häufig verwendete Operatoren sind die folgenden:

Addition: $6 + 2 = 8$

Subtraktion: $6 - 2 = 4$

Multiplikation: $6 \cdot 2 = 12$

Division: $6 : 2 = 3$

Potenzen: $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Fakultät: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Weitere Operatoren sind zum Beispiel: $\sqrt{\quad}$, \int_a^b , Σ , Π , $f(x)$, ...

Terme

Ein Term ist ein mathematischer Rechenausdruck, der Zahlen, Variablen und oft mehrere Rechenoperatoren sinnvoll miteinander verknüpft.

Beispiel für einen Term: $(2 + 5)^2 \cdot 5 + 7$

Das ist kein Term: $(-)1+^2 \cdot) : 2$

Geogebra

3.2 Vorrangrechenregeln

Methoden

Terme haben einen Wert, der meistens genau bestimmt werden kann. Da ein Term mehrere Rechen-
symbole gleichzeitig enthalten kann, muss in Regeln festgelegt werden, welche Rechenoperationen
zuerst ausgeführt werden. Diese Regeln nennt man Vorrangrechenregeln.

Von links nach rechts („vlnr“)

Die Rechenoperationen eines Terms werden grundsätzlich immer von links nach rechts berechnet. Dabei fassen wir die Rechnung ganz links als erstes zusammen. Die Rechnung ersetzen wir im Term durch das neu entstandene Ergebnis. Da das Ergebnis ja aus der Rechnung hervorgeht und wir den Rest des Terms einfach abschreiben, hat der neu entstandene Term den gleichen Wert. Wir schreiben deshalb an den Anfang jeder Zeile ein Gleichheitszeichen. Auf diese Weise vereinfachen wir dem Term solange, bis wir seinen Wert ermittelt haben.

$$\begin{array}{l} 3 + 7 + 14 - 23 \\ = 10 + 14 - 23 \end{array}$$

Rechenbäume

Ein Rechenbaum hilft dabei, den Wert eines Terms zu bestimmen. Dabei werden Schritt für Schritt kleinere Rechenoperationen eines Terms immer weiter zusammengefasst, bis nur noch der Wert des Terms, also der Stamm des Baumes, übrig ist. Wichtig dabei ist, dass der Teil des Terms, der nicht berechnet wird, mit in den nächsten Schritt übernommen wird.

$$\begin{array}{l} 3 + 7 + 14 - 23 \\ = 10 + 14 - 23 \\ = 24 - 23 \\ = \underline{1} \end{array}$$

[lernvideo](#)

- Bestimme je den Wert des Terms und zeichne dazu je einen Rechenbaum.
 - $3 + 17 - 10$
 - $45 \cdot 2 : 10$
 - $35 + 27 - 42 - 15$
 - $3 \cdot 25 : 15 \cdot 9$

Punktrechnung vor Strichrechnung („PvS“)

Mit „Punktrechnung“ meint man die Multiplikation (Symbol \cdot) und Division (Symbol $:$).

Mit „Strichrechnung“ meint man die Addition (Symbol $+$) und Subtraktion (Symbol $-$).

Sind sowohl Punkt- als auch Strichrechnungen in einem Term vorhanden, so werden die Punktrechnungen zuerst ausgeführt.

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 - 8 \\ = & \underbrace{10} + \underbrace{21} - 8 \\ = & \underbrace{31} - 8 \\ = & \underline{\underline{23}} \end{aligned}$$

PvS
vlnr
vlnr

Einfache Rechenbäume

Da das Zeichnen von echten Bäumen nicht sehr übersichtlich ist, werden Rechenbäume oft mit geschweiften Klammern dargestellt. Die Rechnungen, die ausgeführt werden, werden dabei zu einer einzelnen Zahl zusammengefasst. Die restlichen Zahlen und Operationszeichen bleiben stehen.

Außerdem kann die angewendete Vorrangrechenregel am Rand der Rechnung vermerkt werden.

[lernvideo](#)

2. Bestimme je den Wert des Terms und zeichne dazu je einen Rechenbaum.

a) $2 + 9 : 3$

b) $2 + 2 \cdot 9 - 20$

c) $7 \cdot 5 - 64 : 8$

d) $4 \cdot 6 - 6 \cdot 4$

e) $25 - 2 \cdot 10 + 8$

f) $3 - 10 : 5$

g) $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4$

h) $1 + 2 \cdot 3 + 4$

i) $1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6$

Potenzen und Klammern zuerst („PuK“)

Sind in einem Term Potenzen und Klammern enthalten, so werden diese zuerst berechnet. Steht zwischen zwei Klammern nur noch eine einzelne Zahl, so kann die Klammer weggelassen werden.

$$\begin{aligned} & 3^2 + (2 \cdot 4) \cdot 3 \\ = & 9 + \underbrace{8} \cdot 3 \\ = & 9 + \underbrace{24} \\ = & \underline{\underline{33}} \end{aligned}$$

PuK
PvS
vlnr

[lernvideo](#)

3. Bestimme je den Wert des Terms und zeichne dazu je einen Rechenbaum.

a) $22 - (21 : 3)$

b) $3^2 + 4^2 - 5^2$

c) $(1 + 4) \cdot 2^3$

d) $2 - (2 + 8) : 10$

e) $6^2 : (10 - 4)$

f) $1^2 \cdot 1^3 \cdot 1^4 \cdot 1^5$

g) $(1 + 4)^2 : 25$

h) $(6^2 + 7^2) \cdot 2$

i) $(11^2 + 11^3) \cdot 11$

Kombinierte Vorrangrechenregeln

In einem Term werden immer zuerst die Potenzen und Klammern aufgelöst, dann wird die Punktrechnung und abschließend die Strichrechnung je von links nach rechts gerechnet.

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (2^3 + 5) + (2 + 1)^2 \cdot 3 + (5 - 2^2) \\ &= 3 \cdot (8 + 5) + (2 + 1)^2 \cdot 3 + (5 - 4) \\ &= 3 \cdot 13 + 3^2 \cdot 3 + 1 \\ &= 3 \cdot 13 + 9 \cdot 3 + 1 \\ &= 39 + 27 + 1 \\ &= 66 + 1 \\ &= \underline{67} \end{aligned}$$

Handwritten annotations on the right side of the calculation:
- $(2^3 + 5)$ and $(2 + 1)^2$ are labeled **KuP** (Klammern und Potenzen).
- $(5 - 2^2)$ is labeled **KuP**.
- $3 \cdot 13$, $9 \cdot 3$, and 1 are labeled **PvS** (Punktrechnung).
- $39 + 27 + 1$ and $66 + 1$ are labeled **vlnr** (von links nach rechts).

4. Bestimme je den Wert des Terms und zeichne dazu je einen Rechenbaum.

a) $(3 + 9) \cdot 10 + (2^2 - 3) \cdot 12$

b) $4 \cdot (19 - 3^2) : 10 + 100 : 5^2$

c) $21^2 - 11^2 + 12^2 \cdot (2 + 5)$

d) $[121 : (22 - 11) + 11 \cdot 11] - 11$

e) $(10 + 5)^2 : 5^2 - 3^2$

f) $(1 + 2)^2 \cdot (3 + 4)^3 \cdot (5 + 6)^4$

Von innen nach außen („vina“) für verschachtelte Klammern

Sind in einem Term mehrere Klammern enthalten, so werden Klammern in Klammern zuerst berechnet. Man rechnet also von innen nach außen.

Um nicht durcheinander zu kommen, verwendet man dann unterschiedliche Arten von Klammern:

{au- [mit- (innen) te] Ben}

$$\{10 \cdot [(3 + 4) \cdot 5 + 6] + 2\} \cdot 2$$

$$\begin{aligned} & \{10 \cdot [(3 + 4) \cdot 5 + 6] + 2\} \cdot 2 \\ &= \{10 \cdot [7 \cdot 5 + 6] + 2\} \cdot 2 \\ &= \{10 \cdot [35 + 6] + 2\} \cdot 2 \\ &= \{10 \cdot 41 + 2\} \cdot 2 \\ &= \{410 + 2\} \cdot 2 \\ &= 412 \cdot 2 \\ &= \underline{824} \end{aligned}$$

Handwritten annotations on the right side of the calculation:
- $(3 + 4)$ is labeled **PuK** (Punktrechnung in Klammern).
- $7 \cdot 5 + 6$ is labeled **PvS** (Punktrechnung).
- $35 + 6$ is labeled **PuK**.
- $10 \cdot 41 + 2$ is labeled **PvS**.
- $410 + 2$ is labeled **PuK**.
- $412 \cdot 2$ is labeled **vlnr** (von links nach rechts).

Lernvideo

5. Bestimme je den Wert des Terms und zeichne dazu je einen Rechenbaum.

a) $[(10^2 - 5^2) : 25 + 2] \cdot 2 + 15$

b) $\{12^2 - (25 - 14) \cdot 4\} : 10$

c) $[11^2 : (11 \cdot 2 - 11) + 11 \cdot 11] : 11$

d) $\{30 - [75 : (10 + 5)]\} : \{10 - [25 : (2 + 3)]\}$

e) $\{2^4 - [(5^2 - 1) : 3 - 2]\} : 10$

f) $\{2 \cdot [2 \cdot (2 \cdot 3^2)^2]^2\}$

Lösungen der Übungsaufgaben

Ausführliche Lösungen

- Bestimme je den Wert des Terms und zeichne dazu je einen Rechenbaum.
 - 10
 - 9
 - 5
 - 45
- Bestimme je den Wert des Terms und zeichne dazu je einen Rechenbaum.
 - 5
 - 0
 - 27
 - 0
 - 13
 - 1
 - 14
 - 11
 - 33
- Bestimme je den Wert des Terms und zeichne dazu je einen Rechenbaum.
 - 15
 - 0
 - 40
 - 1
 - 6
 - 1
 - 1
 - 170
 - 15.972
- Bestimme je den Wert des Terms und zeichne dazu je einen Rechenbaum.
 - 132
 - 8
 - 1328
 - 121
 - 0
 - 45.196.767
- Bestimme je den Wert des Terms und zeichne dazu je einen Rechenbaum.
 - 25
 - 10
 - 12
 - 5
 - 1
 - 705.277.476.864

Erweitern von Brüchen

Ein Bruch wird erweitert, indem man Zähler und Nenner mit derselben natürlichen Zahl multipliziert.

4. Gib jeweils an, mit welcher Zahl der Bruch erweitert wurde.

a) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

c) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

d) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

e) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

f) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

g) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

h) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

i) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

j) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

5. Ergänze den fehlenden Zähler.

a) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

b) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

c) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

d) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

e) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

f) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

g) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

h) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

i) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

j) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$

6. Ergänze den fehlenden Nenner.

a) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$

b) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$

c) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$

d) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$

e) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$

f) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$

g) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$

h) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$

i) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$

j) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$

7. Erweitere die Brüche jeweils mit der angegebenen Zahl.

a) Erweitere alle Brüche jeweils mit 2.

b) Erweitere alle Brüche jeweils mit 3.

c) Erweitere alle Brüche jeweils mit 5.

d) Erweitere alle Brüche jeweils mit 100.

e) Erweitere alle Brüche jeweils mit 7.

f) Erweitere alle Brüche jeweils mit 11.

g) Erweitere alle Brüche jeweils mit 15.

h) Erweitere alle Brüche jeweils mit 17.

i) Erweitere alle Brüche jeweils mit 23.

j) Erweitere alle Brüche jeweils mit 112.

Vorlagen

Merksatz

Dies ist ein Merksatz.

lernvideo

Interaktiv

Geogebra

Übungen

Methoden

Ausführliche Lösungen

1. Aufgabe mit 2 Spalten.

- | | |
|----|----|
| a) | b) |
| c) | d) |
| e) | f) |
| g) | h) |
| i) | j) |

2. Aufgabe mit 5 Spalten.

- | | | | | |
|----|----|----|----|----|
| a) | b) | c) | d) | e) |
| f) | g) | h) | i) | j) |
| k) | l) | m) | n) | o) |
| p) | q) | r) | s) | t) |

3. Aufgabe mit 1 Spalte.

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)
- f)
- g)
- h)
- i)
- j)

4. Aufgabe mit 3 Spalten.

- | | | |
|----|----|----|
| a) | b) | c) |
| f) | g) | h) |
| k) | l) | m) |
| p) | q) | r) |